Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Dr. Florian Litzinger

Seminar Geometrische Analysis

Sommersemester 2024

Thema des Seminars: Krümmungsfluss ebener Kurven.
Zielgruppe: Studierende der Mathematik.
Voraussetzungen: Analysis I-III, Lineare Algebra I-II.
Termin: Dienstags, 15–17 Uhr c.t., Raum G02-20.

Inhalt

In diesem Seminar soll eine Einführung in den Krümmungsfluss von Kurven (curve shortening flow) gegeben werden. Dieser ist ein Beispiel eines geometrischen Flusses, also einer geometrischen partiellen Differentialgleichung. Dabei wird eine im euklidischen Raum eingebettete Kurve in Richtung ihres Normalenvektors verformt, wobei die Geschwindigkeit dieser Bewegung in jedem Punkt proportional zu der Krümmung der Kurve ist. Uns interessiert sodann das Langzeitverhalten der Kurve unter gewissen Annahmen über die Eigenschaften der initialen Kurve. Die Evolution von Kurven in der Ebene ist heute sehr gut verstanden, sodass wir uns dem Studium einiger Ergebnisse darüber widmen werden.

Nach einem einleitenden Teil über die Wärmeleitungsgleichung im euklidischen Raum sowie die Differentialgeometrie von Kurven in der Ebene untersuchen wir den Krümmungsfluss solcher Kurven und leiten die wichtigsten Evolutionsgleichungen der geometrischen Größen her. Außerdem betrachten wir einige Beispiele spezieller Lösungen des Flusses. Dann wenden wir uns den Hauptergebnissen über das Langzeitverhalten des Krümmungsflusses von ebenen Kurven, den Sätzen von Gage–Hamilton und Grayson zu. Je nach Zahl der Teilnehmenden können wir dann einige weitere Aspekte des curve shortening flow behandeln.

Formalia

Relevant für den Erwerb des Seminarscheins sind, neben der regelmäßigen Teilnahme am Seminar, ein Vortrag von 90 Minuten Länge sowie eine etwa zweiseitige Zusammenfassung der wichtigsten Inhalte des Vortrags. Die Vorträge können wahlweise auf Deutsch oder Englisch gehalten werden. Außerdem sollte jedem Vortrag mindestens eine Besprechung der Inhalte des Vortrags im Rahmen einer Sprechstunde vorhergehen.

Während die obigen inhaltlichen Voraussetzungen ausreichen, um dem Seminar folgen zu können, sind – je nach Vortragsthema – Vorkenntnisse aus den Vorlesungen *Differentialgeometrie*, *Funktionalanalysis*, *Partielle Differentialgleichungen* oder *Geometrische Evolutionsgleichungen* hilfreich (jedoch nicht erforderlich). Bei Interesse ist auch ein eher angewandter Vortrag über numerische Methoden für den curve shortening flow möglich. Darüber hinaus kann das Seminar gut mit der parallelen Vorlesung *Elementare Differentialgeometrie* (Prof. Grunau) kombiniert werden. Im Anschluss an das Seminar ist eine Abschlussarbeit zu einem geeigneten Thema im Bereich der geometrischen Analysis denkbar.

Sämtliche Literatur ist in der Bibliothek verfügbar oder über die unten angegebenen Links innerhalb des Netzes der Universität abrufbar.

Themenkomplexe

1. Die Wärmeleitungsgleichung: spezielle Lösungen, Maximumprinzip, wichtige Ungleichungen, Bernsteinmethode.

2. Differentialgeometrie von Kurven: Frenet-Formeln, Krümmung.

3. Krümmungsfluss von Kurven in der Ebene: Evolutionsgleichungen, spezielle Lösungen, Bernstein-Abschätzungen.

4. Gage–Hamilton–Grayson-Theorem: Vermeidungsprinzip, Huiskens Sehne-Bogen-Abschätzung, Andrews–Bryan-Abschätzung.

5. Selbstähnliche und uralte Lösungen, Monotonieformeln.

6. Numerische Verfahren: DeTurck-Trick, Finite Differenzen- und Finite Elemente-Verfahren.

Vorträge

1. 07.05.2024, Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^n$ (I)
   Einleitung, Gradientenfluss, Invarianzen, Maximumprinzip
   [1], Abschnitte 1.1–1.4 (Theorem 1.5 ohne Beweis, ohne Lemma 1.6, Theorem 1.7, Theorem 1.8), Aufgaben 1.2, 1.3; ergänzend [4], Abschnitt 2.3

2. 14.05.2024, Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^n$ (II)
   Existenz von Lösungen, asymptotisches Verhalten, Bernsteinmethode, Harnack-Ungleichung
   [1], Abschnitte 1.5–1.8 (Theorem 1.9 ohne Beweis), Aufgaben 1.6, 1.7; ergänzend [4], Abschnitt 2.3

3. 21.05.2024, Differentialgeometrie ebener Kurven
   Parametrisierte Kurven, Umparametrisierungen, Parametrisierung nach Bogenlänge, (einfach) geschlossene Kurven, Tangente, Normale, Krümmung, Frenet–Serret-Gleichungen
   [1], Abschnitt 2.1; [2], S. 26–33, S. 40–42

4. 28.05.2024, Krümmungsfluss ebener Kurven (I)
   Einleitung, Evolutionsgleichungen, graphische Lösungen
   [1], Abschnitt 2.2, 2.3; Aufgabe 2.3

5. 04.06.2024, Krümmungsfluss ebener Kurven (II)
   Evolution des Flächeninhalts, Kurzzeitexistenz, Bernsteinmethode
   [1], Abschnitte 2.4–2.6 (Theorem 2.11 ohne Beweis) sowie Theorem 2.12 (ohne Beweis)

6. 11.06.2024, Gage–Hamilton–Grayson-Theorem (I)
   Vermeidungsprinzip
   [1], Abschnitte 3.1, 3.2 (ohne Bemerkung 3.2)

7. 25.06.2024, Gage–Hamilton–Grayson-Theorem (II)
   Huiskens Sehne-Bogen-Abschätzung
   [1], Abschnitt 3.3 (ohne Bemerkung 3.10)

8. 02.07.2024, Gage–Hamilton–Grayson-Theorem (III)
   Verfeinerte Abschätzung
   [1], Abschnitt 3.4

9. 09.07.2024, Gage–Hamilton–Grayson-Theorem (IV)
   Graysons Theorem
   [1], Abschnitt 3.5 (Lemma 3.29 ohne Beweis)

Literatur

[1] B. Andrews, B. Chow, C. Guenther und M. Langford. *Extrinsic geometric flows*. Graduate Studies in Mathematics 206. Providence, RI: American Mathematical Society, 2020. DOI: 10.1090/gsm/206.

[2] C. Bär. *Elementare Differentialgeometrie*. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage. De Gruyter, 2010. DOI: 10.1515/9783110224597.

[3] K.-S. Chou und X.-P. Zhu. *The Curve Shortening Problem*. New York: Chapman and Hall/CRC, 2001. DOI: 10.1201/9781420035704.

[4] L. C. Evans. *Partial differential equations*. Second edition. Graduate Studies in Mathematics 19. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010. DOI: 10.1090/gsm/19.

[5] R. Haslhofer. „Lectures on curve shortening flow“. Lecture notes. 2016. URL: https://www.math.utoronto.ca/roberth/pde2/curve_shortening_flow.pdf.